3)a- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN* on a : $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.

PROBLEME **(10 points)**

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A. On pose $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv 2\alpha \ [2\pi]$ où α est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O. Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).

A-1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J.

a- Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.

b- Prouver que le centre de f est le point A.

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I.

a- Montrer que f(B) = O et que f(C) = E.

b- En déduire que $\frac{OE}{BC} = \cos\alpha$.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(B) = O$ et $\sigma(C) = E$.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Montrer que $\sigma(O) = I$.

4)a- On désigne par $S_{(OE)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OE). Montrer que $\sigma = S_{(OE)} \circ f$.

b- Montrer que $\sigma(D) = A$ et $\sigma(A) = J$.

5) Soit Ω le centre de σ.

a- Montrer que $(\sigma \circ \sigma)(D)=J$ et en déduire que $\Omega \in (DJ)$

b- Montrer que Ω appartient à la droite (BI).

c- Construire le point Ω.

d- Montrer que $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha).\overrightarrow{\Omega B}$. (1)

B- Dans cette partie on suppose que OC = 1 et on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

1)a- Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha \ [2\pi]$ et que $OI = \cos\alpha$.

b- En déduire que $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\vec{u} + (\cos\alpha\sin\alpha)\vec{v}$.

c- En utilisant la relation (1), montrer que les coordonnées $\underline{(x,y)}$ du point Ω sont telles que $x = 2\cot g^2\alpha$ et $y = \cot g\alpha$.